



TITLE:

Boltzmann方程式の解の行動 (生物モデルの数学)

AUTHOR(S):

篠原, 昌彦

CITATION:

篠原, 昌彦. Boltzmann方程式の解の行動 (生物モデルの数学). 数理解析研究所講究録 1973, 174: 21-30

ISSUE DATE:

1973-03

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/107069>

RIGHT:

Boltzmann 方程式の解の行動

東大 理 解原 昌彦

§ 1. H 定理

先ず Boltzmann 方程式とは次の微分積分方程式を言う。

$$(1) \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{X^i}{m} \frac{\partial f}{\partial x^i} = B[f, f]$$

$$2 = v^i B[f, f] = \iint_{R^3 \times S^2} \{ f'_i f'_i - f_i f_i \} F(|v_i - v|, \theta) \, dv_i d\ell$$

$v = (v^1, v^2, v^3) \in R^3$: 速度空間

$v_i = (v_i^1, v_i^2, v_i^3) \in R^3$: (衝突してくる粒子)

$x = (x^1, x^2, x^3) \in D$: 位置空間.

$X = (X^1, X^2, X^3)$: 外力 γ として

m ; 粒子の質量.

X は x にのみ depend する.

$\ell \in S^2$: $\theta = \arg(v_i - v, \ell)$

$f'_i \equiv f(v_i, x, t)$: $f' \equiv f(v', x, t)$

/

$$f_1 \equiv f(v_1, x, t)$$

$$\begin{cases} v' = v + l(l, v_1 - v) \\ v_1' = v_1 - l(l, v_1 - v) \end{cases}$$

f は粒子の個数の位相空間に於ける密度。即ち、 $dv dx$ 中の粒子の個数が $f(v, x, t) dv dx$ 個である。 t はもちろん時刻を示す。

この時 $\begin{pmatrix} v' \\ v_1' \end{pmatrix} \leftarrow \begin{pmatrix} v \\ v_1 \end{pmatrix}$ の変換は 6 次元の直交変換になっている。従って $dv' dv_1' = dv dv_1$ 。

$$\text{また} \quad |v_1 - v| = |v_1' - v'|$$

$$\theta = \arg(v_1 - v, l) = \arg(v_1' - v', l) \equiv \theta' \pmod{\pi}$$

が成立つ。

F は粒子間の相互作用により決まる 2 変数の関数である。

以下この F では出てくる積分は絶対収束するとし、且つハルマータスに因して広義一様収束するとする。即ち Fubini の定理の条件および $\frac{\partial}{\partial x}$ と $\int dv$ の交換の条件は満足されているものとする。

$\varphi(v)$ を v の関数として 次の積分を考える。

$$\begin{aligned} (2) \quad B_\varphi &\equiv \int \varphi B[f, f] dv = \int \varphi(v) \underbrace{\{f_1' f' - f_1 f\}}_{dv_1 dv dl} F(|v_1 - v|, \theta) \\ &= \int \varphi' \{f_1 f - f_1' f'\} F(|v_1' - v'|, \theta') dv_1' dv' dl \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \varphi' \{f, f - f, f'\} F(|v_1 - v|, \theta) dv, dv dl \\
&= \frac{1}{2} \int (\varphi - \varphi') \{f, f' - f, f\} F(|v_1 - v|, \theta) dv, dv dl \\
&= \frac{1}{2} \int (\varphi_1 - \varphi'_1) \{f, f' - f, f\} F(|v_1 - v|, \theta) dv, dv dl \\
&= \frac{1}{4} \int (\varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi'_1) \{f, f' - f, f\} F(|v_1 - v|, \theta) dv, dv dl
\end{aligned}$$

次の定義とする。

$$\begin{cases}
H_0(t) \equiv - \int_D f \log f dv dx \\
H^i(t, x) \equiv - \int v^i f \log f dv, \quad H = (H^1, H^2, H^3) \\
\mathcal{H}(t, x) \equiv - \int f \log f dv
\end{cases}$$

(2) $\varphi = 1 + \log f$ とおくと

$$\begin{aligned}
\int (H \log f) B[f, f] dv &= \frac{1}{4} \int (\log f + \log f_1 - \log f' - \log f'_1) \\
&\times \{f, f' - f, f\} F dv, dv dl = \frac{1}{4} \int \left(\log \frac{f f_1}{f' f'_1} \right) (f, f' - f, f) F dv, dv dl \\
&\leq 0 \quad (\because F \geq 0)
\end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned}
(1 + \log f) \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} (f \log f) \\
(1 + \log f) v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} &= \frac{\partial}{\partial x^i} (v^i f \log f) \\
(1 + \log f) \frac{\partial f}{\partial v^i} &= \frac{\partial}{\partial v^i} (f \log f)
\end{aligned}$$

従って (1) の両辺に $-(1 + \log f)$ を掛けて dv で積分すると

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial H^i}{\partial x^i} &= - \frac{1}{4} \int \left(\log \frac{f f_1}{f' f'_1} \right) (f, f' - f, f) F dv, dv dl \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

ただし (2) で、 f の物理的意味から、 $|v| \rightarrow \infty$ の時 $f \rightarrow 0$

及び $|X|$ の有界性を仮定した。

さらに dx で D 内で積分すると。

$$\frac{dH_D}{dt} + \int_S H_n dS = \int_D B(H \log f) dx \geq 0$$

ただし H_n は H の、 $\partial D = S$ の outer normal n の projection.

今、適当な境界条件が成立しているとして、 $\int_S H_n dS = 0$

を仮定すると、(例えば $D = \mathbb{R}^3$ で $|f| \rightarrow 0$ as $|x| \rightarrow \infty$ の場合)

$$\frac{dH_D}{dt} \geq 0 \quad \text{が成立する。}$$

すなわち、 H_D は時間と共に増加する。これが古典的な Boltzmann の H 定理である。

$$\frac{dH_D}{dt} = 0 \quad \text{が成立するのは} \quad \log f + \log f_1 = \log f_1' + \log f'$$

が成立する時に限る。この時は

$$\log f = a + b^i v^i + c |v|^2 \quad \text{と表わされる。}$$

(例えば文献 [1] 参照)

$$\therefore f = A \exp(B |v - u|^2) \quad \text{と表わされる。}$$

ここで $A, B, u = (u^1, u^2, u^3)$ はいずれも x の関数である。すなわち、 f は locally Maxwellian distribution の密度関数である。

§2 平衡状態への移行の速さ。

前§の結果より、Boltzmann 方程式の解は $t \rightarrow \infty$ に従って速度に関して、Maxwell 分布に近づくことが期待される。以下はその数学的な justification である。

しかし、spatially inhomogeneous な方程式、即ち、 f が x に本当に depend する場合は、解の存在は局所解しか分らないため、(文献 [6]、変形した Boltzmann 方程式の global solution に関しては [12]) 以下では spatially homogeneous 即ち $f = f(t, v)$ なる場合に限る。

a) Gas of hard balls に関して。

Carleman 文献 [1].

初期値 f_0 が

$$0 \leq f_0(v) \leq \frac{a}{\sqrt{1+|v|^2}} \kappa \quad \kappa > 6 \quad a > 0$$

を満足する時 $0 \leq f(v, t) \leq \frac{a}{\sqrt{1+|v|^2}} \kappa$ なる解は unique に存在する。この f は $f(v, t) \rightarrow g$ に point-wise に収束する。但し g は f_0 と一次及び二次のモーメントが同じな Maxwell 分布の density 。

b) Kac's caricature に関して。

McKean [14] 参照。この方程式は spatially homogeneous Boltzmann 方程式の一次元のモデルである。

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R} \times S^1} \{f(t, x \cos \theta - y \sin \theta) f(t, x \sin \theta + y \cos \theta) - f(t, x) f(t, y)\} dy d\theta$$

に対し $\sup\text{-norm}$ を $\|\cdot\|$ で表わすと. $(x \in R^1, y \in R^1)$

$$f_0(x) \text{ 且 } \int f_0(x) dx = 1, \int |x|^3 f_0(x) dx < \infty \quad \int x^2 f_0(x) dx = \sigma^2$$

を満たすとし. g を平均 0, 分散 σ^2 の Maxwell 分布の密度と

すると, f_0 を初期値とする Kac's caricature の解 f と

すると, $\varphi \in C^3, \|\varphi\| < \infty, \|\varphi''\| < \infty$ なる

関数 φ に対して.

$$\left| \int \varphi(x) f(t, x) dx - \int \varphi(x) g(x) dx \right| \leq e^{-t} \|\varphi\| + C \|\varphi''\| e^{-(1-\frac{t}{2})t}$$

が成立つ。

c) 一般の場合。

H. Grad [6] 参照. spatially homogeneous なる方程式は,

$$(3) \quad \frac{\partial f(v, t)}{\partial t} = \int_{S^2 \times R^3} \{ f(v', t) \cdot f(v_1', t) - f(v, t) \cdot f(v_1, t) \} F d\Omega dv_1$$

$$\text{今 } g = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}|v|^2\right) \text{ とし.}$$

$f = g + g^{\frac{1}{2}} h$ と置いて, (3) を h に関する方程式に書き直すと, $\frac{\partial h}{\partial t} + Lh = P(h, h)$ と書ける。

$$\text{ここで } Lh = -2g^{-\frac{1}{2}} B(g, g^{\frac{1}{2}} h)$$

$$P(h, h) = g^{-\frac{1}{2}} B(g^{\frac{1}{2}} h, g^{\frac{1}{2}} h)$$

粒子間の potential が十分強い時. (hard ball もしくは, $\frac{1}{r^s}$ の反発力. で $s \geq 5$) であり, 相互作用が有界の時,

L は $Lh = \nu \cdot h + Kh$ と分解できる。

(Grad [5] 参照.)

$$\therefore \int \nu(v) = \int F(|v-v_1|, 0) g(v_1) dv_1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K: \text{compact operator} \end{array} \right.$$

(★) ν は下から有界 即ち $\exists c > 0 \quad c \leq \nu(v)$

$$\text{且つ } \nu \leq \nu_1 \cdot (1 + |v|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \exists \nu_1 > 0.$$

簡単に分る通り、 L は symmetric non-negative operator
従ってその spectrum はすべて non-negative.

又 K は compact operator なる故.

$$(\star\star) \text{ess-spect}(L) = \text{ess-spect}(\nu).$$

一ろ、zero は L の固有値でその固有空間は $\psi_0 = g^{\frac{1}{2}}$,

$$\psi_i = \nu^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} \quad (i=1, 2, 3), \quad \psi_4 = (|v|^2 - 3) \left(\frac{1}{6}g\right)^{\frac{1}{2}} \text{ の } 5 \text{ つ}$$

で張られる。 (★) および (★★) より zero は ~~孤立~~ 固有値である。

$$\therefore \left\{ \begin{array}{l} \exists \mu > 0 \quad (\text{non-zero spectrum の infimum}) \\ (h, Lh) > \mu(h, h) \quad \text{if} \quad (h, \psi_i) = 0 \end{array} \right.$$

出来れば L^2 -理論の中で話を進めたいのであるが、 $P(h, h)$
が bilinear operator として、 L^2 -norm では有界にならない故
次の新しい norm を導入する。

$$H_r(h) = \max_v (1 + |v|^2)^{\frac{r}{2}} |h(v)|, \quad r > 0$$

~~## 1. L^2 -norm とする.~~

Grad は $0 < \alpha < \mu$ なる任意の α に對して、 $\exists C(\alpha), \exists M(\alpha)$

$N_3(h_0) < C(\lambda)$ ならば 解が存在して、(h_0 は初期値)

$N_3(h) \leq M(\lambda) e^{-\lambda t}$ であると言っているが、この推論は多分誤りであろう。

しかし、 L の固有値 $\mu < \nu$ なる μ が存在すれば (即ち $\mu < \nu$ であれば) この主張は正しい。

従って、問題は L の固有値問題に帰着する。

これが正しい例として、Quasi-Maxwellian gas、つまり $F(|v-u|, \theta) = \Phi(\theta)$ と取り、且つ $\int \Phi(\theta) d\theta = c < \infty$ の場合は、spectrum は全部固有値で、それらすべて分っている。この結果を見て $\mu < \nu$ が分る。猶、この場合は、 L^2 -理論の枠内で処理出来て、殆どずっと簡単になる (H. Tanaka)。

$\lambda = \mu$ ととれば良いのであるが、これはまだ不明である。

それ以上の評価は望めない。従って、上の評価はある意味では最良に近いものであるか。norm が物理的意味と結びつかないこと、特に初期値の制限の意味が不明であることが不満である。むしろ、任意の初期値から出発した時に、

いつかある時刻に $N_3(h) < C(\lambda)$ となる というようなことの方が問題なのかも知れない。(McKean [14] の introduction 参照)。

文献

[1] T. Carleman

" Problèmes Mathématiques dans la Théorie Cinétique des Gaz " Almqvist & Wiksells, Uppsala

[2] ———

" Sur la théorie de l'équation intégrodifférentielle de Boltzmann " Acta Math 60, 1933

[3] S. Chapman & T. G. Cowling " The mathematical theory of non-uniform gases " Cambridge Univ press 1939.

[4] H. Grad " Asymptotic theory of the Boltzmann equation " Phys. Fluids 6 147.

[5] ——— " Asymptotic theory of the Boltzmann equation II " Rarefied gas dynamics. J. A. Laurmann ed. vol I. Academic press, New York 1963.

[6] ——— " Asymptotic equivalence of the Navier-Stokes and non-linear Boltzmann equation "

Proceedings of the Symp. in Appl. Math XVII ^{AMS} 1965

[7] D. Hilbert " Gröndzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen "

[8] E. H. Hauge "Exact and Chapman-Enskog solutions of the Boltzmann equation for the Lorentz Model"

Arkiv for Det Fysiske Selskap i Trondheim No 5-1965

[9] H. P. McKean Jr. "Chapman-Enskog-Hilbert expansion for a class of solutions of the telegraph equation" J. Math. Phys. vol 8 No 3 1967

[10] — "A simple model of the derivation of fluid mechanics from the Boltzmann equation".

[11] D. Morgenstern "Analytical studies related to the Maxwell-Boltzmann equation"

J. Rat. Mech Anal 4. 1955

[12] A. Ja. Pougner "The Boltzmann equation in the kinetic theory of the gases"

A.M.S. translation 47-(2)

[13] G. E. Uhlenbeck & G. W. Ford. "Lectures in Statistical mechanics" A.M.S. 1963

[14] H. P. McKean Jr. "Speed of approach to equilibrium for Kac's caricature of Maxwellian gas" Arch. for Rat Mech & Anal. 21 (1966)